Álgebra I (MA – 2221)
Guía de Ejercicios Nº 2

1.- Para $A = \{1,2,3,4\}$, sean R y S las relaciones sobre A definidas por

$$R = \{(1,2),(1,3),(2,4),(4,4)\} \quad \text{y} \quad S = \{(1,1)(1,2),(1,3),(2,3),(2,4)\}$$

Determinar: R^{-1}, S^{-1}, $R \circ S$, $S \circ R$, $R \cup S$ y $R \cap S$.

2.- Sean $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{1,4,6,16\}$, $C = \{2,3,8,10\}$ y sean $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$ las relaciones:

$$xRy \text{ si y solo si } y = x^2 \quad \text{y} \quad aSb \text{ si y solo si } b = \frac{a}{2}$$

Hallar:
(a) R y S por extensión.
(b) $S \circ R$ por extensión.
(c) Dominio e imagen de R, S y $S \circ R$

3.- Hallar $R \circ S$ y $S \circ R$ en los siguientes casos, si R y S son relaciones definidas en $\mathbb{R}$:
(a) $R = \{(x,y) : y = x^2 + 1\}$ y $S = \{(a,b) : b = 3a + 2\}$
(b) $R = \{(x,y) : y = 2x - 1\}$ y $S = \{(a,b) : b = 3a^2\}$

4.- Si $A = \{1,2,3,4\}$ y $R = \{(1,1),(1,2),(2,3),(3,3),(3,4),(4,4)\}$ es una relación en A, hallar dos relaciones S y T en A, tales que $S \neq T$ y $R \circ S = R \circ T = \{(1,1),(1,2)(1,4)\}$.

5.- En $A = \{1,2,4,6,8\}$ se define la relación: xRy si y solo si $3|(x + y)$.
(a) Determinar R por extensión.
(b) Representar R.
(c) Indicar las propiedades que verifica R.

6.- Sea $E = \{a,b,c,d,e\}$. Para las siguientes relaciones definidas sobre E hallar dominio e imagen, indicar cuáles propiedades verifica y si alguna es una relación de equivalencia, hallar la partición asociada,
(a) $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(b,c),(b,a),(a,c)\}$
(b) $S = \{(a,a),(b,b),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a)\}$
(c) $T = \{(a,b),(b,c),(c,d),(d,e),(e,a)\}$
(d) $P = \{(a,b),(b,c),(a,c),(c,d),(b,d),(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$

7.- Para cada una de las siguientes relaciones, determinar si es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva:
(a) En $\mathbb{Z}$: xRy si y solo si $x + y$ es par
(b) En $\mathbb{Z}$: xRy si y solo si $x - y$ es impar
(c) En $\mathbb{N}$: xRy si y solo si $x|y$
(d) En $\mathbb{R}$: xRy si y solo si $x - y \in \mathbb{R}^+$
(e) En $\mathbb{Z}$: xRy si y solo si $x - y$ es impar
(f) En $A = \{a,b,c,d,e\}$: xRy si y solo si x, y son ambas vocales o ambas consonantes.

Prof. María Teresa Varela

8.- Sea $A = \{1,2,3,4,5\}$. Dar un ejemplo de una relación para cada una de las siguientes situaciones:
(a) Reflexiva pero no simétrica ni transitiva
(b) Simétrica pero no reflexiva ni transitiva
(c) Transitiva pero no reflexiva ni simétrica
(d) Reflexiva y simétrica pero no transitiva
(e) Reflexiva y transitiva pero no simétrica
(f) Simétrica y transitiva pero no reflexiva

9.- Sean R y S relaciones definidas sobre un conjunto A. Demostrar que:
(a) Si R y S son reflexivas, entonces $R \cup S$ y $R \cap S$ son reflexivas.
(b) Si R y S son simétricas, entonces $R \cap S$ es simétrica.
(c) Si R y S son transitivas, entonces $R \cap S$ es transitiva.
(d) $R \cup R^{-1}$ es simétrica.
(e) Si R es una relación de equivalencia, entonces R^{-1} es una relación de equivalencia.

10.- Para las siguientes relaciones, probar que son de equivalencia, determinar las clases de equivalencia y el conjunto cociente:
(a) En $A = \{1,2,3,4\}$: $x \sim y$ si y solo si $x = y$ o $x + y = 3$
(b) En $\mathbb{R}$: $x \sim y$ si y solo si $x^2 - x = y^2 - y$

11.- Hallar la relación de equivalencia asociada, si se sabe que:
(a) $\{\{a\},\{b,c,e\},\{d\}\}$ es una partición de $A = \{a,b,c,d,e\}$
(b) $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5\}\}$ es una partición de $A = \{1,2,3,4,5\}$

12.- Sean R y S relaciones de equivalencia en los conjuntos A y B respectivamente. En $A \times B$ se define la relación: $(a,b) \sim (c,d)$ si y solo si aRc y bSd. Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

13.- Determine cuáles de las siguientes relaciones f, entre los conjuntos A y B dados, son funciones:

(a) $f = \{(x,y) \in A \times B : y = x^2 + 3\}$, donde $A = B = \mathbb{Z}$

(b) $f = \{(x,y) \in A \times B : y^2 = x\}$, donde $A = B = \mathbb{R}$

(c) $f = \{(-1,1),(1,1),(2,4),(-2,4)\}$, donde $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ y $B = \{1,2,3,4\}$

(d) $f = \{(c,b),(a,b),(b,d)\}$, donde $A = \{b,a,c\}$ y $B = \{d,b,c,a\}$

14.- ¿Define la regla $f(x) = \frac{1}{x^2-2}$ una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? ¿Una función $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$? ¿Una función $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$?

15.- Sea $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $g(n) = 2n$. Encuentre $g \circ f$, si $A = \{1,2,3,4\}$ y $f: A \to \mathbb{N}$ está dada por $f = \{(1,2),(2,3),(3,5),(4,7)\}$.

Prof. María Teresa Varela

16.- Sean $f, g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, donde $f(x) = x + 1$ y $g(x) = \max\{1, x - 1\}$ (máximo entre 1 y x-1):

(a)¿Cuál es la imagen de f?

(b)¿Es f sobreyectiva?

(c)¿Es f inyectiva?

(d)¿Cuál es la imagen de g?

(e)¿Es g sobreyectiva?

(f) ¿Es g inyectiva?

(g)Pruebe que $g \circ f = i_d$

(h) Determine $f \circ g$ para $x = 2,3,4,7,12,25$

17.- Sean $f: A \to B$ y $g: C \to D$ funciones. Defina $h: A \times C \to B \times D$ como:

$$h(a, b) = (f(a), g(b))$$

Demuestre que si f y g son biyectivas, entonces h es biyectiva.

18.- Determine si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas:

(a) $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f\big((a, b)\big) = b$

(b) $f: \mathbb{Z} \to \{0,1\}$ definida por $f(a) = \begin{cases} 0 & si\ a\ es\ par \\ 1 & si\ a\ es\ impar \end{cases}$

19.- Sea $f: X \to Y$ una función y $A, B \subseteq X$. Probar que:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

(c) $f(A) - f(B) \subseteq f(A - B)$

(d) Si $A \subseteq B$, entonces $f(A) \subseteq f(B)$

(e) Si f es inyectiva, entonces $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

20.- Sea $f: X \to Y$ una función y $A, B \subseteq Y$. Probar que:

(a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

(b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

(c) $f^{-1}(A) - f^{-1}(B) = f^{-1}(A - B)$

(d) Si $A \subseteq B$, entonces $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$

21.- Sean $f: A \to B$ y $g: B \to C$ funciones. Probar que:

(a) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.

(b) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.

(c) Si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

22.- Sean $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{1,2,3,4\}$. Se define la función $f: \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ por:

$$f(X) = B - X, \quad \text{para todo } X \in \mathcal{P}(A)$$

Determinar si f es inyectiva y sobreyectiva.

23.- Definir biyecciones entre los siguientes pares de conjuntos:

(a) $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$

(b) Los intervalos $(0,1]$ y $[0,1)$

(c) $(A \times B) \times C$ y $A \times (B \times C)$, para A, B y C conjuntos cualesquiera

24.- Las funciones $f: A \to B$, $g: B \to C$ y $h: C \to D$ son tales que $g \circ f$ y $h \circ g$ son biyectivas. Probar que f, g y h son biyectivas (ayuda: usar g^{-1}, asegurándose que existe)

Prof. María Teresa Varela